



TITLE:

2山mapの分岐(力学系理論とその 応用分野における非線形問題)

AUTHOR(S):

三波, 篤郎

CITATION:

三波, 篤郎. 2山mapの分岐(力学系理論とその応用分野における非線形問題). 数理解析研究所講究録 1984, 536: 150-159

ISSUE DATE:

1984-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98677>

RIGHT:

2 山 map の分岐.

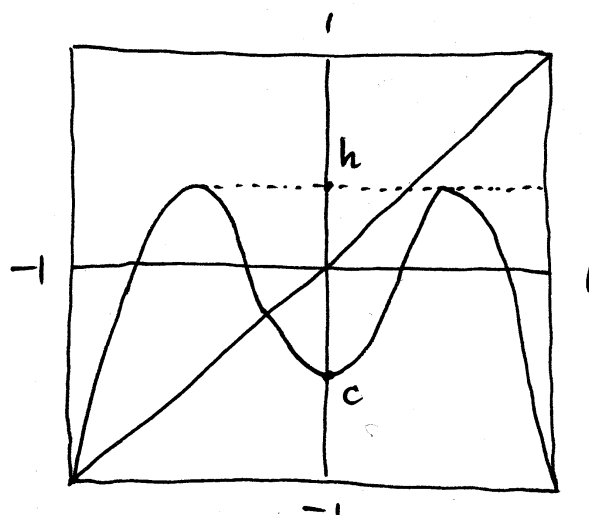
北大. 理. 三波 篤郎.

区間上の unimodal map の 1-parameter family $\{f_\mu\}$ に対して, μ の変化とともに, f_μ がどのような周期の stable periodic point をもつかを見てみると, そこには self-similar な構造がみえる. これは, symbol 列の \ast -product によって表現される ([C-E], III.1, II.2, II.4 など参照)

ここでは, 1次元 map の 2-parameter family に対して, 各周期の (super) stable な periodic pt. を持つ branch が parameter sp. (2-plane になる) 上でどのように分岐しているかを計算機によって調べた結果を述べ, これに対して, symbolic な解析を行なう.

§. 1. 計算結果.

$I = [-1, 1]$ 上の 2-parameter family として, 右図のような 2 山の map を考える.



$-1 \leq h \leq 1$ と $-1 \leq c \leq h$ が parameter であり.

この family を $\{f_{c,h}\}$ とする.

$f_{c,h}(x)$ に対し.

(i) 偶関数 i.e. $f_{c,h}(x) = f_{c,h}(-x)$

(ii) $f_{c,h}(-1) = f_{c,h}(1) = -1$

という条件をつけ、さらに 4 次関数であるとすると.

この family は unique に定まる.

具体的には.

$$f_{c,h}(x) = (-1-c-b)x^4 + bx^2 + c$$

$$b = 2(h-c) + 2\sqrt{(h-c)(h+1)}$$

である.

これを standard family とする.

$I = [-1, 1]$ 上の map f の n -周期点 p は.

$df^n/dx(p) = 0$ とするとき. super stable とする.

(これは p の orbit が 特異点を通ることを意味する.)

standard family の parameter sp. (c, h) -plane

上に, super stable な 2-周期, 3-周期

4-周期, 5-周期点 を持つ branch を書く.

それぞれ 図 1 ~ 図 4 のようになる.

注意

(i) 上の図では. 都合により. h は下が大き

なっている. また. $c \leq h$ という条件から.

$c > h$ の部分は書かれていない.

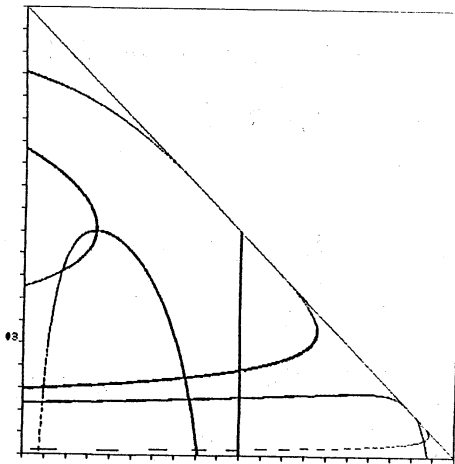


図 1

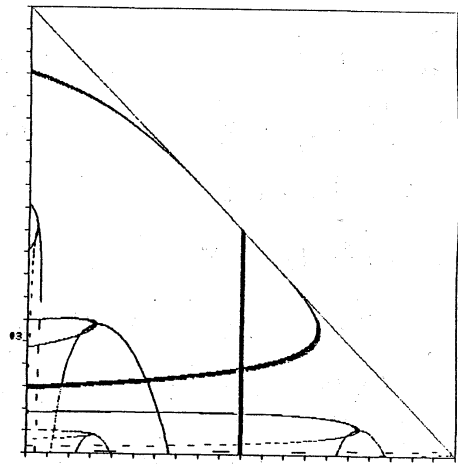


図 2

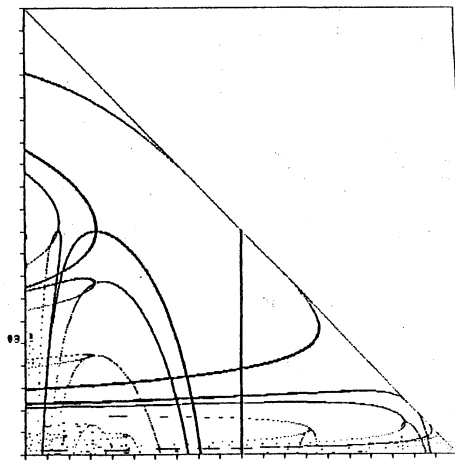


図 3

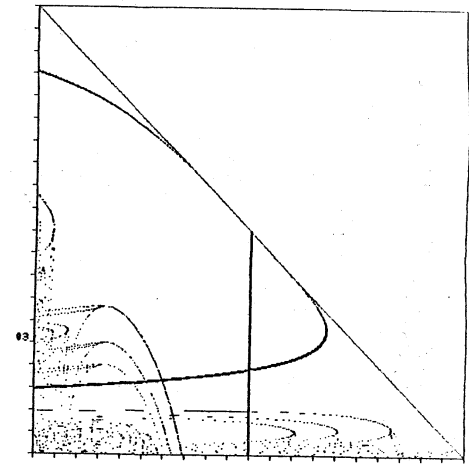
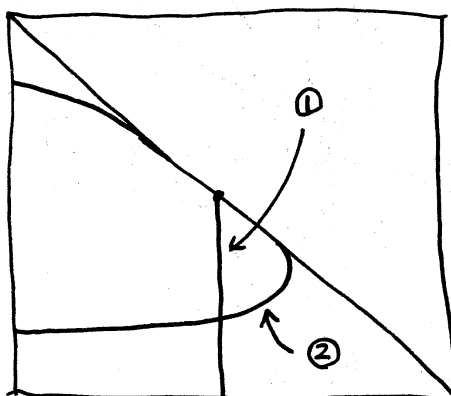


図 4

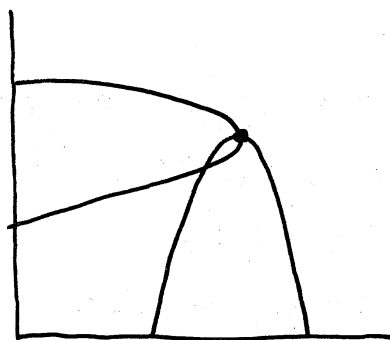
- (ii) 対角線は、ただの目安であり branch ではない。
 (iii) $n=2$ では、super stable n -周期点 と言った時。
 (a) $f_{c,h}^n(p) = p$ (b) $df_{c,h}^n/dx(p) = 0$
 をみたす p が存在するような (実際は、
 3つの頂点のうち2つが (a) をみたすような)
 (c, h) を plot している。つまり、 n は、

最小周期とは限らず、その新数の周期に対応する branch も書かれています。

(iv) 図の中に共通して現われる、右図のようなたての line ① と、
曲線 ② は、ともに、
super stable fixed pt.
を表わしています。



さて、二つの図における特徴的な構造は、
右図のような、たてと横の
parabola のような curve が
頂点付近で交わったような
パターンで構成されています。
事である。



実は、このパターンは、二つでワンセットと考えてよい。
というのは、たての parabola は 極小 (i.e. 0) を
通う super stable periodic pt. の branch, また横
の parabola は 極大を通うものであって、この
頂点付近の交点にあたり (c.h.) に対して
f_{c,h} は、極大と極小をそれぞれ 1 回づつ通う
ような super stable periodic point を持つものである。
(つまり 2 重に singular である)

(注: 頂点ではない交点では、2つの異なる super
stable periodic pt. を同時に持つ。))

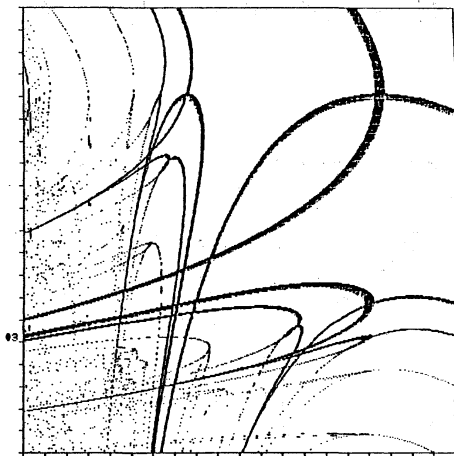


図 5

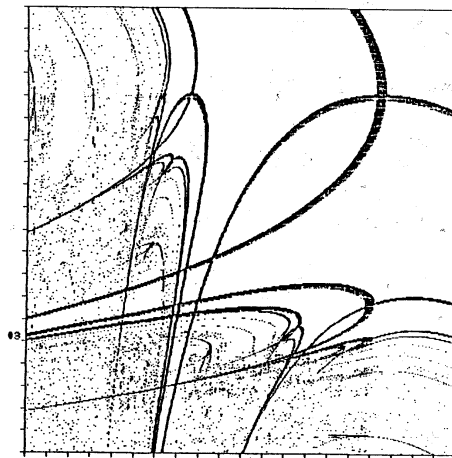


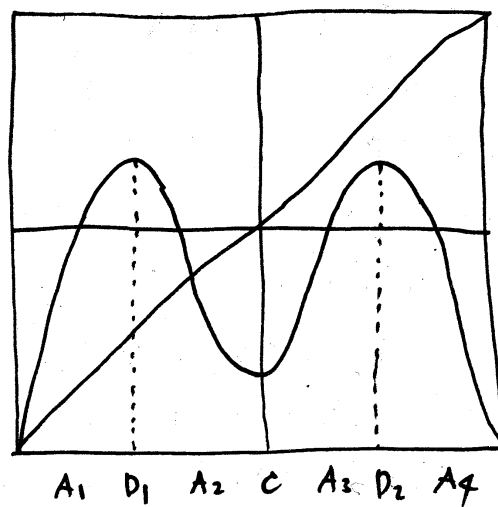
図 6

このパターンは 2 分岐に対して どんな構造を
持っているだろうか。それを調べたのが上の図 5
と図 6 である。これは、図 1 の 2-周期点を
示す branch の 2 つの parabola の交点付近を
周期 $\delta \approx 16$ の case で拡大したものである。
明らかに self-similar な構造が見えるが。
それが常に、たてと横の両方向に対して存在
している。

§. 2 Symbolic analysis

右図のような記号を
使う事にす。

中心が C , 2 つの極大が
 D_1, D_2 , これらにはさまれた
区間が $A_1 \sim A_4$.



前記の計算結果より、2重に singular な periodic point が本質的である事がわかる。実は、このまわりでの perturbation によって local に $f_{c,h}^n$ (n は周期) が 2山 map となるのである。

また、super stable periodic pt を示す branch は、必ずこの 2重に singular な点⁶に つながっている。

(i.e. 例の 2つの parabola のノットン の一部となる)

(注: 対角線に接している branch はこうなっているが、

これは特別である。: 対角線では unimodal となっている)

また、similarity が たてと横の 2方向に存在している事から、* - product は 2種類定ギされる事が予想される。

以下、抽象的な symbol 列の話になるが、このイキジは、具体的な map を考えている。

Definition A_i, D_i, c の有限列が doubly critical とは、 D_1 or D_2 と c をそれぞれ 1つずつ含む事をいう。

Definition $\varepsilon_i = \text{sgn}(A_i) = \begin{cases} 1 & i=1, 3 \\ -1 & i=2, 4 \end{cases}$

$A = A_{j_1} \dots A_{j_\ell} c A_{i_1} \dots A_{i_k} D_l$ は doubly critical sequence とする。

A に対し、map $\tau_A^c : \{A_i, D_i, c\} \rightarrow \{\text{sequence 全体}\}$ を次のように決める。

$$\tau_A^c(x) = \alpha_x A_{i_1} \dots A_{i_k} \beta_x A_{j_1} \dots A_{j_\ell} \\ = = \tau.$$

$$\alpha_x = \begin{cases} (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_2 & x = A_1, D_1, A_2 \\ c & x = c \\ (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_3 & x = A_3, D_2, A_4 \end{cases}$$

$$t \models c. \quad (-1)_c A_2 = A_3, \quad (-1)_c A_3 = A_2$$

$$\beta_x = \begin{cases} (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_2 & x = A_1, A_4 \\ D_1 & x = D_1, D_2 \\ (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_1 & x = A_2, c, A_3 \end{cases}$$

$$t \models D_1. \quad (-1)_{D_1} A_1 = A_2, \quad (-1)_{D_1} A_2 = A_1$$

Definition

sequence $B = B_1 B_2 B_3 \dots$ (\models に対して $*$ -product

$A * c B$ を次のように決める.

$$A * c B = \tau_A^c(B_1) \tau_A^c(B_2) \tau_A^c(B_3) \dots$$

(注) この定義は, $c=0$ のために f^{l+k+2} を考える事によって natural に得られるものである.

なお, D_2 を含む doubly critical seq. でも, 同様にできるが, \models では, D_1 の case のみ扱う.

次に, D_1 のまわりの local interval の iteration を考える事にしよう. $\tau_A^{D_1} : \{A_1, D_1, c\} \rightarrow \{\text{seq.}\}$ を, 次のように定義する.

$$\tau_A^{D_1}(x) = \alpha_x A_{j_1} \dots A_{j_2} \beta_x A_{i_1} \dots A_{i_k}$$

$$\alpha_x = \begin{cases} (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_2 & x = A_1, D_1, A_2 \\ D_1 & x = c \\ (\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k})_{D_1} A_1 & x = A_3, D_2, A_4 \end{cases}$$

$$\beta_x = \begin{cases} (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_2 & x = A_1, A_4 \\ c & x = D_1, D_2 \\ (\varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_2})_c A_3 & x = A_2, c, A_3 \end{cases}$$

さしに. 前と同様に $*\text{-product}$ $A *_{D_1} B$ が定めて了.
次に order を定めて了.

order は 最後が D_i or C となる A_i の有限列
か. A_i の無限列 に対してのみ定めて了. これは.

2山 map の 2-parameter family で. $\{h=1\}$, $\{c=-1\}$
の line 上でのみ order が定まる事に依拠している.

また. この line 上では. 実際は symbol の order 通りに
並んで 11 子のように見える.

Definition

$B \leq F$ 是. D_i or C で 終る A_i の有限列 か
 A_i の無限列 とす. order $B < F$ 是

次のように決める. $B_1 \dots B_{k-1} = F_1 \dots F_{k-1}$ であり

$B_k \neq F_k$ のとき.

$$B < F \iff \begin{cases} B_1 \dots B_{k-1} \text{ が positive で } B_k < F_k \\ \vdots \\ \text{negative で } B_k > F_k \end{cases}$$

ただし. A_i, D_i, C の order は. natural なその

さしに. A_i の列が positive とは. この sign の積が
(negative)
正 (負) となる事.

さて. $B = B_1 \dots B_{n-1} D_1$ とす.

$$A *_{D_1} B = \tau(B_1) \tau(B_2) \dots \tau(B_{n-1}) \tau(D_1)$$

となつてゐるか. $B_i = A_{i_1} \dots A_{i_k}$ なる $\tau(B_i)$ は D_i, C

を含まず. $\tau(D_1) = \alpha_{D_1} A_{j_1} \dots A_{j_l} D_1 A_{j_1} \dots A_{j_l}$

となつてゐる. ($= \tau$. τ とは τ_A^c の $=$)

よつて. $A *_{D_1} B$ に対し D_1 が最後に なるように rotate
したものを $(A *_{D_1} B)_{D_1}$ とかく. するから.

$$(A *_{D_1} B)_{D_1} = A_{j_1} \dots A_{j_l} \tau(B_1) \dots \tau(B_{n-1}) \alpha_{D_1} A_{i_1} \dots A_{i_k} D_1$$

同様に B が D_2 で終り時

$$(A *_c B)_{D_2} = A_{j_1} \dots A_{j_\ell} \tau(B_1) \dots \tau(B_{n-1}) \alpha_{D_2} A_{i_1} \dots A_{i_k} D_2 \geq \text{す}.$$

$B = B_1 \dots B_{n-1} c$ の時. c が最後になるように $A *_c B$ を $A_{i_1} \dots A_{i_k} \beta c A_{j_1} \dots A_{j_\ell}$ だけ shift し.

$$(A *_c B)_c = A_{i_1} \dots A_{i_k} \beta c A_{j_1} \dots A_{j_\ell} \tau(B_1) \dots \tau(B_{n-1}) c \geq \text{す}.$$

同様に $A *_c B$ に対して $(A *_c B)_{D_1} \geq (A *_c B)_c$ を定めてす.

そうすると. $*_c$ は order preserving であり. $*_{D_1}$ は order reversing であることが示せる. すなわち.

Theorem

$E, F \geq D_i, c$ で終り A_i の seq. であって $E < F$ とす.

(i) E, F が D_i, D_j で終りなす.

$$(A *_c E)_{D_i} < (A *_c F)_{D_j}$$

$$(A *_c E)_{D_i} > (A *_c F)_{D_j}$$

(ii) E, F がともに c で終るとき

$$(A *_c E)_c < (A *_c F)_c$$

$$(A *_c E)_c > (A *_c F)_c$$

parabola の similar な構造は.

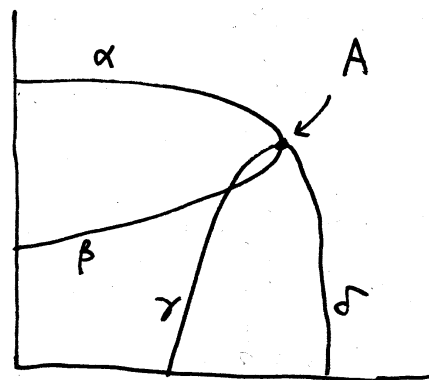
二つの $*$ -product によって

次のように説明できる.

doubly critical な A の交点

とす 2つの parabola の A で

分割されて 11 の curve を右図のように.



$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ となる。これは S の curve における
super stable periodic pt. を表わす seq. 12 次の方
のようになっている。

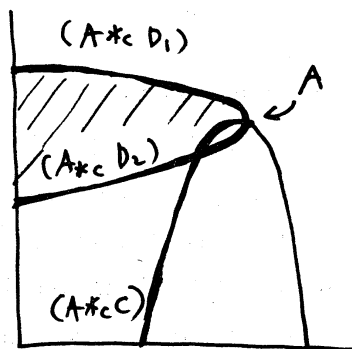
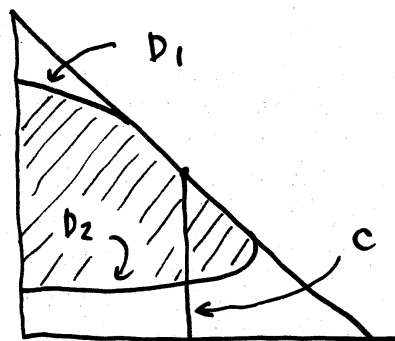
$$\alpha = (A * c D_1) D_1$$

$$\beta = (A * c D_2) D_2 = (A * D_1 c) c$$

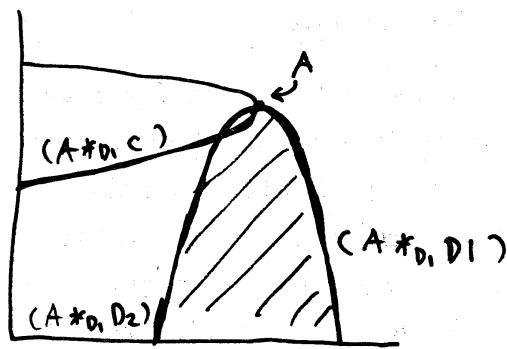
$$\gamma = (A * D_1 D_2) D_2 = (A * c c) c$$

$$\delta = (A * D_1 D_1) D_1$$

これは diagram a 中の
例の super stable fixed pt.
を示す branch が、これは S の
*-product によってうつされた
所を示している。(下図)



$A * c$



$A * D_1$

さらに、Theorem より、これは S の *-product は、上の
 D_1, D_2 branch で囲まれた基本領域を、上図右左
のようにうつしていきように思われる。

Reference

[C-E] Collet - Eckmann : Iterated maps on the
interval as dynamical systems. Progress in Physics. Birkhäuser.